Πανελλαδικές Εξετάσεις 2026 – Μαθηματικά Προσανατολισμού

Ημερήσια και Εσπερινά Γενικά Λύκεια · Τετάρτη 3 Ιουνίου 2026

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού | Τάξη: Γ΄ Λυκείου | Ημερομηνία εξέτασης: 03/06/2026

— ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ —

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. (Μονάδες 6)

Απάντηση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)). Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε $f(x_2)-f(x_1)=0$, δηλαδή $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άρα η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. (Μονάδες 5)

Απάντηση:

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Ορδίτης Φροντιστήριο

Υπεύθυνοι Σπουδών
Νίκος Ορδίτης (μαθηματικός)
Σίσσυ Καλλιακμάνη (φιλόλογος)

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; (Μονάδες 4)

Απάντηση:

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Α4. Σωστό – Λάθος. (Μονάδες 10)

Απάντηση:

α	**β**	**γ**	**δ**	**ε**
Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος

Σχόλια: (α) Μια συνάρτηση είναι «1-1» αν και μόνο αν δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

(ε) Ισχύει $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{-1}{\eta\mu^2 x}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\ln(x-1)$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x-2}+1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$. (Μονάδες 8)

Απάντηση:

Πεδίο ορισμού:

$D_h=\{x\in D_g: g(x)\in D_f\}=\{x\geq 2:\sqrt{x-2}+1>1\}=\{x\geq 2:\sqrt{x-2}>0\}=(2,+\infty)$.

Τύπος: για $x>2$,

$h(x)=f(g(x))=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)=2\ln\sqrt{x-2}=2\cdot\dfrac{1}{2}\ln(x-2)=\ln(x-2)$.

Άρα $h(x)=\ln(x-2)$, $x\in(2,+\infty)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε την h^{-1} (μονάδες 6). (Μονάδες 9)

Απάντηση:

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, αφού για $2<x_1<x_2$ έχουμε $0<x_1-2<x_2-2$ και η ln είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $\ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)$, δηλαδή $h(x_1)<h(x_2)$. Επομένως η h είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.

Σύνολο τιμών: η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, με $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Άρα $h((2,+\infty))=\mathbb{R}$, που είναι το πεδίο ορισμού της h^{-1}.

Για $y\in\mathbb{R}$: $y=\ln(x-2)\Leftrightarrow x-2=e^y\Leftrightarrow x=e^y+2$. Επομένως $h^{-1}(x)=e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$

.

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$. (Μονάδες 8)

Απάντηση:

Η παράσταση ορίζεται για $x>2$, οπότε το όριο είναι όριο στο 2^+. Είναι:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\ln(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

αφού $f(2)=2\ln 1=0$ και $f'(x)=\dfrac{2}{x-1}$, άρα $f'(2)=2$. (Εναλλακτικά: με $u=x-2\to 0^+$, $\dfrac{2\ln(1+u)}{u}\to 2$.)

Επίσης $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=-\infty$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=(-\infty)\cdot 2=-\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$, $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$, με οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και την ευθεία $y=x$ εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι i) $\kappa=0$ και ii) $\mu=1$. (Μονάδες 8)

Απάντηση:

i) Αν ήταν $\kappa\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\kappa x)=\pm\infty$ (ανάλογα με το πρόσημο του κ), οπότε η f δεν θα είχε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ — άτοπο. Άρα $\kappa=0$. (Τότε πράγματι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x}{x^2+1}=0$, οπότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.)

ii) Για $\kappa=0$ είναι $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$, με $f(0)=0$, οπότε η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Είναι $f'(x)=\dfrac{\mu(x^2+1)-\mu x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{\mu(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, άρα $f'(0)=\mu$. Η εφαπτομένη στο $O(0,0)$ είναι η $y=f'(0)x=\mu x$ και πρέπει να ταυτίζεται με την $y=x$, άρα $\mu=1$.

Γ2. i) Μονοτονία και ακρότατα της f (μονάδες 6). ii) Σύνολο τιμών $\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3) και πλήθος ριζών της $f(x)=\dfrac{1}{2}+\alpha^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2). (Μονάδες 11)

Απάντηση:

i) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$, $f'(x)>0\Leftrightarrow -1<x<1$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

x	$-\infty$		**−1**		**1**		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
f(x)		↓	$\dfrac{-1}{2}$	↑	$\dfrac{1}{2}$	↓	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=-1$ με τιμή $f(-1)=\dfrac{-1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x=1$ με τιμή $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Η f είναι συνεχής, οπότε:

- $f((-\infty,-1])=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=\left[\frac{-1}{2},0\right)$
- $f([-1,1])=[f(-1),f(1)]=\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$
- $f([1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$

Άρα $f(\mathbb{R})=\left[\frac{-1}{2},0\right)\cup\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Πλήθος ριζών: είναι $\frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν $\alpha=0$, η εξίσωση γίνεται $f(x)=\frac{1}{2}$, η οποία έχει ακριβώς μία ρίζα, την $x=1$ (η τιμή $\frac{1}{2}$ είναι το μέγιστο της f και λαμβάνεται μόνο στο $x=1$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη εκατέρωθεν). Αν $\alpha\neq0$, τότε $\frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}$, δηλαδή ο αριθμός δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη (καμία ρίζα).

Γ3. Για $\nu\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $I_\nu=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$. i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu+I_{\nu+1}=\frac{1}{2\nu+2}$.
ii) Να υπολογίσετε τα I_0, I_1, I_2. (Μονάδες 6)

Απάντηση:

i) $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}$.

ii) $I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{\ln2}{2}$.

Από το (i) για $\nu=0$: $I_0+I_1=\frac{1}{2}$, άρα $I_1=\frac{1}{2}-\frac{\ln2}{2}=\frac{1-\ln2}{2}$.

Για $\nu=1$: $I_1+I_2=\frac{1}{4}$, άρα $I_2=\frac{1}{4}-\frac{1-\ln2}{2}=\frac{\ln2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2\ln2-1}{4}$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, με $0<g(x)<1$ και $g'(x)\neq-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1,0)$ ώστε $g(x_1)+x_1=0$. (Μονάδες 6)

Απάντηση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)+x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$.

Ύπαρξη: η φ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ με $\varphi(-1)=g(-1)-1<0$ (αφού $g(-1)<1$) και $\varphi(0)=g(0)>0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-1,0)$ με $\varphi(x_1)=0$, δηλαδή $g(x_1)+x_1=0$.

Μοναδικότητα: $\varphi'(x)=g'(x)+1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η φ′ είναι συνεχής. Αν η φ′ έπαιρνε τιμές ετερόσημες, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα μηδενιζόταν κάπου — άτοπο. Άρα η φ′ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε η φ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα «1-1», και η ρίζα x_1 είναι μοναδική. (Μάλιστα, αφού $\varphi(-1)<\varphi(0)$, η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα $\varphi'(x)>0$.)

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη $f(x)=\begin{cases} x^2(g(x)+x), x \in (-\infty,0) \\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$. (Μονάδες 2)

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα $f'(0^-)=f'(0^+)$. Είναι $f(0)=2\eta\mu 0+\varepsilon\varphi 0-0=0$.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}x(g(x)+x)=0\cdot g(0)=0$$

(αφού η g είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$).

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-\kappa\right)=2+1-\kappa=3-\kappa$$

Από $f'(0^-)=f'(0^+)$ προκύπτει $3-\kappa=0$, δηλαδή $\kappa=3$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν: i) $f(x)\geq 0$ (μονάδες 4) και ii) η εξίσωση $3f(x)=\pi$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_2 (μονάδες 3). (Μονάδες 7)

Απάντηση:

i) Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$ και $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3$.

Θέτουμε $t=\sigma\upsilon\nu x\in(0,1]$:

$$2t+\frac{1}{t^2}-3=\frac{2t^3-3t^2+1}{t^2}=\frac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2}\geq 0$$

(διότι $2t^3-3t^2+1=(t-1)(2t^2-t-1)=(t-1)^2(2t+1)$), με ισότητα μόνο για $t=1$, δηλαδή $x=0$. Άρα $f'(x)\geq 0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=0$ μόνο στο $x=0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς για κάθε $x\geq 0$: $f(x)\geq f(0)=0$.

ii) Η εξίσωση γράφεται $f(x)=\frac{\pi}{3}$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=+\infty$ (αφού $\varepsilon\varphi x\to+\infty$ και οι άλλοι όροι είναι φραγμένοι). Άρα $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=[0,+\infty)$. Επειδή $\frac{\pi}{3}\in[0,+\infty)$ και η f είναι «1-1», υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$.

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ στο $[x_1,0]$ (μονάδες 3). ii) Αν ο άξονας y'y χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι $\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx=\frac{x_1^4}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$ (μονάδες 7). (Μονάδες 10)

Απάντηση:

i) Για $x\in[x_1,0)$ είναι $f(x)=x^2(g(x)+x)=x^2\varphi(x)$. Η φ είναι γνησίως αύξουσα (Δ1) με $\varphi(x_1)=0$, οπότε για $x\geq x_1$ ισχύει $\varphi(x)\geq\varphi(x_1)=0$. Άρα $f(x)=x^2\varphi(x)\geq 0$ στο $[x_1,0)$, ενώ $f(0)=0$. Επομένως $f(x)\geq 0$ στο $[x_1,0]$.

ii) Είναι $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$ (από Δ3ii), άρα το Ω περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=x_1$, $x=\frac{\pi}{3}$. Επειδή $f(x)\geq 0$ στο $[x_1,0]$ (Δ4i) και στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ (Δ3i), τα εμβαδά των δύο χωρίων είναι:

$$E_1=\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx+\int_{x_1}^{0} x^3\,dx=\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx-\frac{{x_1}^4}{4}$$

$$E_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)\,dx=\left[-2\sigma\upsilon\nu x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)-\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(-1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}\right)-(-2)=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

(χρησιμοποιήσαμε $\int \varepsilon\varphi x\,dx=-\ln(\sigma\upsilon\nu x)+c$ για $\sigma\upsilon\nu x>0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ και $-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$).

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx=\left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx=-{x_1}^3 g(x_1)-3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx$$

Από Δ1 είναι $g(x_1)=-x_1$, οπότε $-{x_1}^3 g(x_1)={x_1}^4$. Από την ισότητα $E_1=E_2$ προκύπτει $\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx=E_2+\frac{{x_1}^4}{4}$. Επομένως:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx={x_1}^4-3\left(1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}\right)-\frac{3{x_1}^4}{4}=\frac{{x_1}^4}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$$

που είναι το ζητούμενο.